Algoritmización para la resolución de ecuaciones no lineales mediante la técnica de iteración variacional.

Algorithmization for solving nonlinear equations using the variational iteration technique.

Arnoldo Abraham Herrera Herrera
Máster en Matemática Aplicada
Estudiante del Doctorado en Matemática Aplicada
UNAN – Managua, Nicaragua
https://orcid.org/0000-0003-3001-8861
arnoldo.herrera@unan.edu.ni

Iván Augusto Cisneros Díaz
Doctor en Matemática Aplicada
UNAN – Managua, Nicaragua
https://orcid.org/0000-0003-2014-1946
ivan.cisneros@unan.edu.ni

RESUMEN

Este trabajo aborda la técnica iteración variacional que es un método iterativo para resolver ecuaciones no lineales de la forma $f(x) = 0$. En este sentido, el objetivo principal es generar nuevos algoritmos y esquemas iterativos que permitan obtener nuevas fórmulas y métodos iterativos.

Se crean nuevas fórmulas mediante procedimientos matemáticos basados en las variantes del método de Newton y las técnicas de iteración variacional. Además, se expresan los desarrollos constructivos de los principales esquemas iterativos.

Se obtienen los principales esquemas iterativos de cada método mediante la deducción de su construcción, así como el análisis de convergencia mediante la aplicación computacional en el lenguaje de programación Python. Se ejemplifican y se calculan raíces de ecuaciones no lineales de algunas funciones bases, utilizadas en los artículos científicos consultados, las cuales tienen características de ser continuas y diferenciables.

Por otra parte, se realiza una comparación entre algunos de los algoritmos existentes y los diseñados en esta investigación, utilizando los criterios de máximo y mínimo número de evaluaciones funcionales. Dichos aspectos son piezas fundamentales para la validez de los nuevos algoritmos.

Según los resultados obtenidos después de las diversas comparaciones, los algoritmos presentan un excelente funcionamiento con respecto a los existentes en la literatura sobre esta área de conocimiento.

Palabras clave: iteración, variacional, convergencia, comparación.

ABSTRACT

This work deals with the variational iteration technique, which is an iterative method for solving nonlinear equations of the form $f(x) = 0$. In this sense, the main objective is to generate new algorithms and new iterative schemes that allow obtaining new formulas and iterative methods.

A review of the various existing formulas is also performed and new formulas are created using mathematical procedures based on Newton's method variants and variational iteration techniques.

The constructive development of the main iterative schemes, as well as the analysis of their convergence, is expressed, emphasizing the order of convergence of that method.

In addition, this study made it possible to obtain the main iterative schemes of each method by deducting its constructive method, as well as the convergence analysis of the method. The roots of nonlinear equations of some basic functions, used in scientific articles consulted, are exemplified and calculated, which have characteristics of being continuous and differentiable.

On the other hand, a comparison is made between the existing algorithms and those designed in this investigation, using the criteria of: Order of convergence and the maximum and minimum number of functional evaluations. These aspects are fundamental parts of the validity of the new algorithms.

According to the results obtained after the various comparisons, the algorithms have an excellent function with respect to those existing in the literature on this area of knowledge.

Keywords: Iteration, variational, convergence, comparison.

Introducción

La teoría de ecuaciones no lineales permite modelar muchos fenómenos de la naturaleza, siendo muestra de ello, la gran cantidad de ecuaciones de este tipo que tienen presencia en diferentes campos: inteligencia artificial, optimización, astrofísica, física cuántica, robótica y en otras áreas del conocimiento. Para la solución de cierto tipo de ecuaciones no lineales se requiere de la aplicación de métodos pertinentes, que resulten ser bastantes efectivos y de alta eficiencia computacional al momento de precisar la solución.

Entre las principales técnicas y procedimientos matemáticos que figuran como los más consistentes para la resolución de ecuaciones no lineales, se encuentran: Trasformación Diferencial, Polinomios de Adomian y Técnica de Iteración Variacional, siendo este último, el método sobre el cual se basa esta investigación.

El estudio continuo sobre la resolución de ecuaciones no lineales es cada día más interesante y sustancial, dado que se busca obtener soluciones aproximadas, de tal forma que permitan resolver problemas de la vida real y comprender en profundidad su proceso, en consecuencia, siempre está latente una necesidad por mejorar el orden y rapidez de convergencia de los métodos iterativos empleados, así como la creación de nuevos métodos numéricos basados en otros ya existentes. Por lo antes expuesto, nuestro interés se centra en ¿Cómo determinar nuevos procedimientos matemáticos numéricos basados en las técnicas iterativas variacionales?

En cuanto a la clasificación de los esquemas iterativos para resolver ecuaciones no lineales del tipo $f\ (x)\ =\ 0$; estos se basan en el número de pasos del proceso, en este sentido un método puede ser de un solo paso o multipaso. (Cisneros, 2017). El método más conocido de un solo paso es el de Newton, el cual en cada paso del proceso necesita evaluaciones funcionales (f, f'); donde f representa la evaluación en la función original y f' la evaluación en su derivada, el esquema correspondiente según (Melan, 1997) es:

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$

Los sucesivos intentos de mejorar su eficiencia, en términos de velocidad de convergencia, dieron sus frutos en forma de otros métodos de un solo punto: los esquemas de Halley, Chebyshev, etc. Haciendo referencia al primer esquema mencionado, (Noor & Noor, 2007) proponen una nueva variante donde muestra que se puede utilizar el método de Newton como un predictor y el esquema de Halley como corrector con la finalidad de obtener un mejor orden de convergencia.

Diversos autores señalan que los métodos de un solo punto antes mencionados tiene convexidad logarítmica, de acuerdo con (Diloné, 2013) el esquema correspondiente es

$$L_f(x_k) = \frac{f(x_k)f''(x_k)}{[f'(x_k)]^2}$$

El uso de este operador permite acelerar la convergencia hasta tercer orden, pero con la condición de evaluar la segunda derivada de la función no lineal en cada iterado, lo cual desde fines prácticos computacionales no es conveniente; esta y otras limitaciones de los métodos punto a punto llevan, en la segunda mitad del siglo XX, al desarrollo de métodos multipaso que, mediante expresiones iterativas sencillas y evaluaciones de derivadas de bajo orden de la función no lineal permiten obtener órdenes de convergencia elevados. (Cisneros, 2017).

Un esquema propuesto por (Traub, 1964), es el método de Potra-Ptak el cual posee la siguiente estructura

$$y_k = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$

$$y_{k+1} = y_k - \frac{f(y_k)}{f'(y_k)}$$

Este método tiene orden de convergencia tres, posteriormente se desarrollaron los métodos clásicos de la familia Chebyshev-Halley, Jarratt, Ostrowski y los métodos de King, los cuales no hacían uso de la evaluación de la segunda derivada, todo ellos con orden de convergencia cuatro.

En los últimos años se analizan métodos iterativos multipunto óptimos con derivada para la solución de ecuaciones no lineales, donde dichos esquemas son construidos mediante la técnica de iteración variacional, la cual tienen la estructura del esquema de Potra-Ptak. Entre las principales investigaciones de la técnica de iteración variacional está el trabajo realizado por (Inokuti, Sekine, & Mura, 1978) donde muestran que la principal ventaja de este método es la flexibilidad para dar soluciones aproximadas a problemas no lineales sin linealización ni discretización, en consecuencia, determinan que este método es simple y eficaz.

Entre los estudios más recientes y relevantes están los realizados por (Noor & Noor, 2007) en ellos se abordan nuevos métodos iterativos de cuarto orden de convergencia, modificaciones del método de House Holder y un método iterativo de quinto orden de convergencia para la resolución de ecuaciones no lineales. En todos estos trabajos figura como soporte principal e innovador modificaciones iterativas a esquemas ya construidos.

Posteriormente (Noor, Shah, Noor, & Al-Said, 2011) crean diferentes tipos de técnicas iterativas donde presentan el proceso constructivo y convergente de cada una, así mismo ejemplifican su eficiencia mediante la consideración de ecuaciones no lineales y su comparación con la solución de otros métodos iterativos. Además, enfatizan en la gran ventaja que proporciona trabajar con funciones auxiliares de tipo exponencial.

Otro documento que alude al mejoramiento y optimización de la técnica de iteración variacional es el creado por (Noor, Shah, Noor, & Al-Said, 2011), el cual aborda el análisis de algunos nuevos métodos iterativos para encontrar múltiples raíces de ecuaciones no lineales utilizando la técnica de iteración variacional. La técnica genera los métodos de orden superior. Aquí, los nuevos métodos son de segundo y tercer orden de convergencia. También muestran varios ejemplos para ilustrar la eficiencia de estos métodos. Luego (Noor, Waseem, Noor, & Al-Said, 2012), aplican la técnica de iteración variacional para la resolución de sistemas de ecuaciones.

Una investigación reciente de (Cisneros, 2017) permite mostrar a detalle la versatilidad computacional de la técnica de iteración variacional, así como diferentes procesos matemáticos para la obtención de esquemas iterativos principales y a su vez en la creación genuina e inédita de algoritmos iterativos para resolución de ecuaciones no lineales.

Todo el abordaje expuesto permite confirmar que la técnica de iteración variacional tiene gran relevancia, por la rápida convergencia y la facilidad computacional para programarse, además que se tiene una alta precisión para el cálculo de las aproximaciones a las soluciones exactas para ecuaciones no lineales.

MATERIALES Y MÉTODOS

En este acápite se muestra la metodología aplicada, así como una perspectiva general de la deducción y generalización del método de Newton mediante la técnica de iteración variacional para la resolución de ecuaciones no lineales, obteniendo así nuevos esquemas iterativos y fórmulas iterativas para el hallazgo de las raíces reales de ecuaciones no lineales consideradas en esta investigación.

La metodología empleada en este trabajo siguió las siguientes etapas:

a. Revisión del estado del arte sobre los métodos iterativos existentes.
b. Estudio de diversos procedimientos matemáticos de las técnicas de iteración variacional, así como sus diferentes aplicaciones a la teoría de los métodos iterativos y otros tópicos relacionados.
c. Selección de funciones auxiliares que generaron diversos esquemas iterativos que permitieron obtener nuevos métodos iterativos, basados en las técnicas de iteración variacional.
d. Programación Orientada a Objetos (POO) en Python de los algoritmos obtenidos por las técnicas de iteración variacional.
e. La comparación realizada se basó en el número de iteraciones de cada método para determinar la solución real de la ecuación no lineal.

1.1. Caso 1. Primera Variante del Método de Newton

$$\boldsymbol{h(x) = f(x) + g(x)}$$

El esquema principal correspondiente a esta variante del método de Newton:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n) + g(x_n)}{f'(x_n) + g'(x_n)}$$

Algoritmo 1: Sea la función auxiliar definida por $g(x) = f(x)e^{-\alpha x},\ \alpha = -\frac{1}{4}$ entonces el método de Newton toma la siguiente forma

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n) + f(x_n)e^{-\frac{x_n}{4}}}{f'(x_n) + f'(x_n)e^{-\frac{x_n}{4}} - \frac{1}{4}\left[f(x_n)e^{-\frac{x_n}{4}}\right]}$$

1.2. Caso 2. Segunda Variante del Método de Newton

$$\boldsymbol{h(x) = \frac{f(x)}{g(x)},\ \ g(x) \neq 0}$$

El esquema principal correspondiente a esta variante del método de Newton:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)g(x_n)}{f'(x_n)g(x_n) - g'(x_n)f'(x_n}$$

Algoritmo 2: Sea la función auxiliar definida por $g(x) = \frac{f'(x)}{2}$ entonces el método de Newton toma la siguiente forma

$$x_{n+1} = x_n - \frac{\frac{1}{2}[f(x_n)f'(x_n)]}{\left[\frac{f'(x_n)}{2}\right]^2 - \frac{1}{2}[f''(x_n)][f(x_n)]}$$

1.3. Caso 3. Iteración Variacional

$$\boldsymbol{H(x) = x + \lambda f(x) g(x)}$$

El esquema principal correspondiente a este caso de la técnica de iteración variacional es:

$$x_n = H(x_n)$$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)g(x_n)}{f'(x_n)g(x_n) + g'(x_n)f(x_n)}$$

Algoritmo 3: Sea la función auxiliar definida $g(x) = e^{-\alpha f(x)},\ \alpha = \frac{1}{2}f'(x)$ entonces

$$g'(x) = -\frac{1}{2}e^{-\frac{f(x)f'(x)}{2}}(f''(x)f(x) + [f'(x)]^2)$$

Luego de efectuar las sustituciones de las funciones en el esquema principal y la realización de operaciones algebraicas para su simplificación asociada, se obtiene el nuevo esquema iterativo, que toma la forma:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n) - \frac{1}{2}\left[[f(x_n)]^2 f''(x_n) + f(x_n)[f'(x_n)^2]\right]}$$

RESULTADOS

Los resultados obtenidos ilustran la eficiencia de los nuevos métodos desarrollados. La comparación se realiza entre el método de Newton y los algoritmos creados y tomando como base fundamental el número de iteraciones para encontrar dicha raíz. Además, funciones bases, aquellas funciones que fueron consideradas en la investigación de (Cisneros, 2017), las cuales poseen características de ser funciones continuas y diferenciables.

Ecuación	Raíz (15 cifras decimales)
$e^{-x} - x^3 = 0$	0.772882959149210
$x - \cos x = 0$	0.739085133215160

$e^{-x} + 2\ln x = 0$	0.798518085322259

De acuerdo con (Severance, 2020), Python es un lenguaje de alto nivel en el cual se han programado todos los algoritmos desarrollados aplicando la filosofía de Programación Orientado a Objeto (POO) y en todos los criterios de parada de los diferentes códigos fuente se utiliza un nivel de tolerancia de $10e^{-15}$.

En la siguiente tabla, a partir de las ecuaciones anteriormente descritas se muestra la comparación entre el método de Newton y los nuevos algoritmos construidos, basándose en el número de iteraciones que requiere cada método iterativo para alcanzar la aproximación establecida de acuerdo a la ecuación no lineal correspondiente.

Ecuación	Valor Semilla	Método de Newton	Algoritmo 1	Algoritmo 2	Algoritmo 3
$e^{-x} - x^3 = 0$	0.7	4	4	4	4
$x - \cos x = 0$		4	3	4	4
$e^{-x} + 2\ln x = 0$		4	4	4	4

CONCLUSIONES

Los resultados de relevancia alcanzados en este trabajo investigativos se detallan a continuación:

Generalización del método de Newton mediante la Técnica de Iteración Variacional para generar nuevos esquemas y métodos iterativos, por tanto, los 3 algoritmos creados para la resolución de ecuaciones no lineales se deducen a partir de dos variantes del método de Newton y 1 caso especial de dicha técnica.

Se encontraron funciones auxiliares pertinentes, específicamente de tipo exponencial, la cuales contribuyeron a determinar los nuevos algoritmos que superan o son equivalentes al orden de convergencia del método de Newton.

Todos los algoritmos desarrollados fueron programados en el lenguaje de programación de alto nivel Python, bajo la filosofía de Programación Orientado a Objeto (POO) y en todos los criterios de parada de los diferentes códigos fuente se utiliza un nivel de tolerancia aproximadamente de $10e^{-15}$. Cada uno de los algoritmos construidos verificaron la condición de ejecutarse en un número menor o igual de iteraciones que el método de Newton. Esto se realizó con el objetivo de comparar los algoritmos óptimos y los que son equivalentes (número de iteraciones) al método de Newton.

Bibliografía

Cisneros, I. (2017). Algoritmos basados en los Polinomios de Adomian e Iteracin Variacional para la resolucin *de ecuaciones no lineales. Managua: UNAN - Managua.*

Diloné, M. (2013). *Métodos iterativos aplicados a la ecuación de Kepler.* España: Universidad de la Rioja.

Inokuti, M., Sekine, H., & Mura, T. (1978). General Use of the Lagrange Multiplier in Nonlinear Mathematical Physics. *Nemat-Nasser*, pp. 156-162.

Melan, A. (1997). Geometry and Convergence of Euler´s and Halley´s Methods. . *SIAM*, 728-735.

Noor, K., & Noor, M. (2007). Iterative methods with fourth-order convergence for nonlinear equations. *Appl. Math. Comput*, 221-227.

Noor, M., Shah, F., Noor, K., & Al-Said, E. (2011). Variational iteration technique for finding multiple roots of nonlinear equations. *Sci. Res. Essays*, 1344–1350.

Noor, M., Waseem, M., Noor, K., & Al-Said, E. (2012). Variational iteration technique for solving a system of nonlinear equations. . Optim. Lett. DOI: 10. 1007/s11590-012-0479-3.

Severance, C. (2020). *Python para todos. Explorando la información con Python 3.* MI, USA: Ann Arbor.

Shah, F. (2012). Variational iteration technique and Numerical Methods for solving nonlinear equations.

Traub, J. (1964). *Iterative Methods for the Solution of Equations.* New Jersey, USA.: Prentice-Hall Englewood Cliffs.