Áreas del Rectángulo y Triángulo Equilátero

Areas of the Rectangle and Equilateral Triangle

Ingrid Judith Orozco Martínez

Licenciada en Ciencias de la Educación con Mención en Matemática

Estudiante de Doctorado en Matemática Aplicada

FAREM-Matagalpa

https://orcid.org/0000-0002-1362-3579

judithorozco655@gmail.com

**Resumen**

Este trabajo plantea la relación natural que existe entre los contenidos de trigonometría plana y la geometría euclidiana, mediante la obtención de las fórmulas referentes al cálculo de áreas y volumen, donde se utiliza la teoría trigonométrica, combinándola adecuadamente con la geometría, para obtener resultados expresados en fórmulas que nos permitan calcular áreas de figuras geométricas.

Las fórmulas de áreas se obtienen a través de la aplicación de la trigonometría y geometría plana. El objetivo principal es demostrar algunos teoremas y mostrar que la teoría matemática desarrolladas en estos niveles, están fundamentadas teóricamente y analíticamente por métodos y procedimientos lógicos, que permiten desarrollar otras formas de demostraciones matemáticas.

Se muestran diversas estrategias de demostración, de manera que su construcción resulte apropiadas para los docentes del nivel educativo de secundaria y universitario.

Se hace énfasis en la necesidad de la deducción del método constructivo, mediante la aplicación de diferentes teoremas trigonométricos y geométricos, entrelazado para producir una combinación de técnicas demostrativas que garanticen una correcta demostración matemática.

Palabras claves: Trigonometría, Geometría, Área, Método Constructivo.

**Abstract**

This work raises the natural relationship that exists between the contents of plane trigonometry and Euclidean geometry, by obtaining the formulas referring to the calculation of areas and volume, where trigonometric theory is used, combining it appropriately with geometry, to obtain expressed results in formulas that allow us to calculate areas of geometric figures.

Area formulas are obtained through the application of trigonometry and plane geometry. The main objective is to demonstrate some theorems and show that the mathematical theory developed at these levels is theoretically and analytically based on logical methods and procedures, which allow the development of other forms of mathematical proofs.

Various demonstration strategies are shown, so that their construction is appropriate for teachers at the secondary and university educational levels.

Emphasis is placed on the need to deduce the construction method, through the application of different trigonometric and geometric theorems, intertwined to produce a combination of demonstrative techniques that guarantee a correct mathematical demonstration.

Keywords: Trigonometry, Geometry, Area, Construction Method.

**Introducción**

En la vida real existen diversas clases de problemas que surgen en la teoría de la trigonometria y geometría, uno de los principales problemas constituye la construcción de las demostraciones matemáticas de cálculo de áreas de figuras geometricas regulares.

Los teoremas presentados en este artículo, están referidos a la combinación de ambas disciplina matematica, la aplicabilidad y el correcto uso de estos teoremas, constituyen un gran desafío para la teoría matemática, sin embargo, se considera importante señalar que la justificación teórica de sus demostraciones es aún más importante, ya que permite ampliar el horizonte lógico y abstracto de la matemática.

Desde un punto de vista teórico, como práctico, de las matemáticas aplicadas, muchas ramas de las ciencias, la ingeniería, la física, la geometría descriptiva, el diseño de estructura, la informática, la astronomía, la inteligencia artificial y la robótica, etc, ponen de manifiesto un alto nivel de interés teórico en el desarrollo de la matemática y especialmente en las demostraciones de dichas fórmulas.

Por otro lado, cada dia, es más creciente las investigaciones referidas a la búsqueda de nuevas formas de demostraciones matemáticas. Entre los principales valores métodológicos de este articulo, se pueden mencionar :

1. Diseño de nuevas estrategias de demostraciones matemáticas, mediante la conjugación o combinación de las teorías trigonométrica y geométrica.

2. Aplicación de diferentes técnicas o procesos lógicos para una correcta demostración matemática.

3. Evidenciar la importancia de la búsqueda de nuevos enfoques de paradigmas demostrativos.

También se enfatiza en la necesidad de establecer nuevas formas demostrativas empleando diferentes técnicas que combine la teoria trigonométrica y geométrica. Uno de los objetivos es mostrar la amplitud de las diversas técnicas demostrativas y dirigir nuestro esfuerzo a otros niveles demostrativos en proposiciones que requieren más justificación en su desarrollo matemático.

**Materiales y Métodos**

Se destacan las demostraciones de las fórmulas de áreas de figuras geométricas regulares, mediante una perspectiva general de la deducción y de la combinación de la teoria geométrica y trigonométrica, obteniendo así nuevos formas demostrativas de dichas fórmulas.

La metodología empleada en este trabajo siguió las siguientes etapas:

1. Revisión bibliográfica sobre los procesos demostrativos de las fórmulas de áreas de figuras geométricas.
2. Estudio de diversos procedimientos matemáticos mediante la combinacion de la trigonometría y geometría.
3. Formulación de nuevos procesos demostrativos por medios trigonométricos y geometricos.

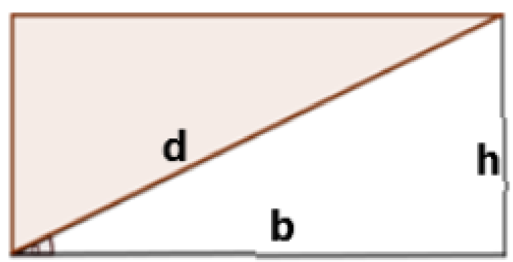
**Fórmulas de Áreas**

**Teorema 1** *El área del rectángulo es (en funcion de la base y la diagonal)*

$$A = bd\sin\alpha$$

*donde $b$ es la base, $d$ es la diagonal y $\alpha$ el ángulo basal.*

**Demostración 1** *Consideremos la figura*




*entonces*

$$\sin\alpha = \frac{h}{d}$$

$$h = d\sin\alpha$$

*luego, el área del rectángulo formado por los dos triángulos es*

$$A = 2\left[\frac{1}{2}(bh)\right]$$

$$A = 2\left(\frac{1}{2}bd\sin\alpha\right)$$

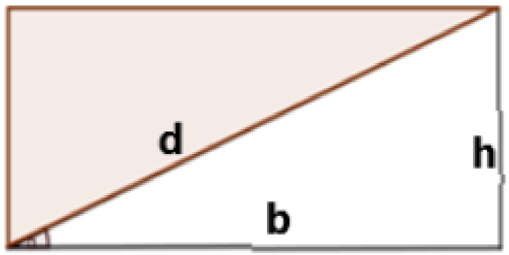
$$A = bd\sin\alpha$$

**Teorema 2** *El área del rectángulo es (en funcion de la altura y la diagonal)*

$$A = dh \cos \alpha$$

*donde $d$ es la diagonal, $h$ es la altura y $\alpha$ el ángulo referido en la figura.*

**Demostración 2** *Consideremos la figura*




*entonces*

$$\cos \alpha = \frac{b}{d}$$

$$b = d \cos \alpha$$

*luego, el área del rectángulo formado por los dos triángulos es*

$$A = 2\left[\frac{1}{2}(bh)\right]$$

$$A = 2\left(\frac{1}{2} dh \cos \alpha\right)$$

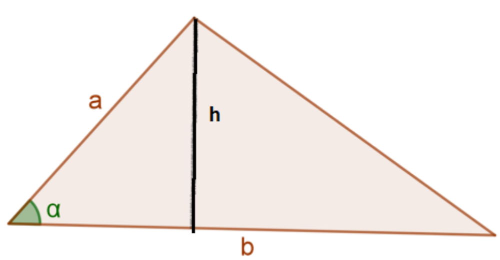
$$A = dh \cos \alpha$$

**Teorema 3** *El área de un triángulo es igual a*

$$A = \frac{1}{2} ab \sin \theta$$

*donde $a$ y $b$ son dos lados del triángulo y $\theta$ es el ángulo entre dichos lados*

**Demostración 3** *Consideremos la figura*



*luego*

$$\sin\alpha = \frac{h}{a}$$

$$h = a\sin\alpha$$

*entonces*

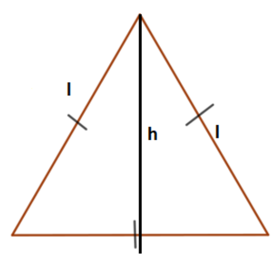
$$A = \frac{1}{2}bh$$

$$A = \frac{1}{2}ab\sin\alpha$$

**Teorema 4** *El área de un triángulo equilátero está dado por*

$$A = \frac{\sqrt{3}}{4}l^2$$

**Demostración 4** *Consideremos un triángulo equilátero de lado $l$ y altura $h$,*




*luego, al aplicar la función seno, obtenemos*

$$\sin 60^\circ = \frac{h}{l}$$

*entonces*

$$h = l\sin 60^\circ$$

*luego el área es*

$$A = \frac{1}{2}(bh)$$

$$A = \frac{1}{2}(l)(l\sin 60^\circ)$$

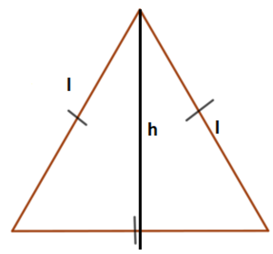
$$A = \frac{1}{2}(l)\left(l\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$A = \frac{\sqrt{3}}{4}l^2$$

**Teorema 5** *El área de un triángulo equilátero está dado por*

$$A = \frac{\sqrt{3}}{4} l^2$$

**Demostración 5** *Consideremos un triángulo equilátero de lado $l$ y altura $h$,*




*al aplicar la función cosecante, obtenemos*

$$\csc 60^\circ = \frac{l}{h}$$

*entonces*

$$h = \frac{l}{\csc 60^\circ}$$

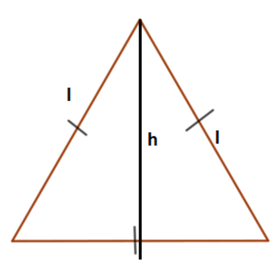
*luego el área es*

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{2}(bh) \\ A &= \frac{1}{2}(l)\left(\frac{l}{\csc 60^\circ}\right) \\ A &= \frac{1}{2}\left(l^2\right)(\sin 60^\circ) \\ A &= \frac{1}{2}\left(l^2\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \\ A &= \frac{\sqrt{3}}{4} l^2 \end{aligned}$$

**Teorema 6** *El área de un triángulo equilátero está dado por*

$$A = \frac{\sqrt{3}}{4} l^2$$

**Demostración 6** *Consideremos un triángulo equilátero de lado $l$ y altura $h$,*



*luego, al aplicar la función tangente, se tiene*

$$\tan 60^\circ = \frac{h}{\frac{l}{2}} = \frac{2h}{l}$$

*entonces*

$$h = \frac{l}{2}\tan 60^\circ$$

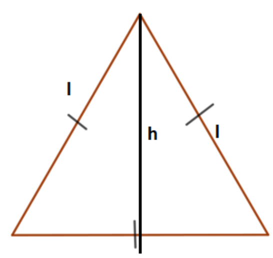
*luego el área es*

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{2}(bh) \\ A &= \frac{1}{2}(l)\left(\frac{l}{2}\tan 60^\circ\right) \\ A &= \frac{1}{2}(l)\left(\frac{l}{2}\sqrt{3}\right) \\ A &= \frac{\sqrt{3}}{4}l^2 \end{aligned}$$

**Teorema 7** *El área de un triángulo equilátero está dado por*

$$A = \frac{\sqrt{3}}{4}l^2$$

**Demostración 7** *Consideremos un triángulo equilátero de lado $l$ y altura $h$,*




*luego, al aplicar el teorema del coseno, se tiene*

$$\begin{aligned} h^2 &= l^2 + \left(\frac{l}{2}\right)^2 - 2l\frac{l}{2}\cos 60^\circ \\ h^2 &= l^2 + \frac{l^2}{4} - 2l\frac{l}{2}\left(\frac{1}{2}\right) \\ h^2 &= \frac{5l^2}{4} - \frac{l^2}{2} \\ h^2 &= \frac{3l^2}{4} \\ h &= \frac{\sqrt{3}}{2}l \end{aligned}$$

*luego, el área del trángulo es*

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{2}(bh) \\ &= \frac{1}{2}(l)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}l\right) \\ &= \frac{\sqrt{3}}{4}l^2 \end{aligned}$$

**Resultados**

Los resultados obtenidos sobre el área de figuras geométricas son:

1. Se demostraron dos fórmulas del área del rectángulo mediante el uso de teoría trigonométrica, es decir:

$$\begin{aligned} A &= bd\sin\alpha \\ A &= dh\cos\alpha \end{aligned}$$

donde $b$ es la base, $d$ es la diagonal, $h$ es la altura y $\alpha$ es el ángulo basal.

2. Se demostró la fórmula del área del triángulo mediante el uso de teoría trigonométrica, es decir:

$$A = \frac{1}{2}ab\sin\alpha$$

donde $a$ y $b$ son los lados que forman el ángulo $\alpha$.

3. Se demostraron de cuatro (4) formas distintas la fórmula del área del trángulo equilátero mediante el uso de teoría trigonométrica, es decir:

$$A = \frac{\sqrt{3}}{4}l^2$$

donde $l$ es el lado del triángulo equilátero.

**Conclusiones**

Luego de haber realizado el análisis detallado de las demostraciones anteriores se llegó a las conclusiones siguientes:

1. Aplicación de principios fundamentales matemáticos en el desarrollo constructivo de un teorema.
2. Formulación de argumentos explicativos y lógicos que permiten la narrativa de la demostración matemática.

3. Aplicación de métodos directos en las demostraciones matemáticas.
4. Procesos de deducción e inducción en los raciocinios del pensamiento lógico matemático.
5. Uso de simbología y de procesos analítico en la construcción de las demostraciones.
6. Vinculación de diferentes teorías matemáticas para la construcción del desarrollo del teorema.
7. Demostrar un teorema mediante diversas ópticas de teorías matemáticas.
8. Combinación de patrones matemáticos en la construcción de teoremas.
9. Generalización de procesos abstractos que permitan inducir o deducir ciertas relaciones propias de los objetos matemáticos.
10. Disponibilidad de los conocimientos matemáticos en el desarrollo demostrativo de un teorema.
11. Capacidad de poder discernir y elegir procesos o métodos demostrativos de acuerdo a la naturaleza de la demostración.
12. Posibilidad de poder aplicar diferentes técnicas matemática para la solución de un determinado problema o bien para demostrar algun tipo de teorema.

En fase conclusiva también podemos afirmar:

En el presente trabajo de investigacion se utilizó la teoría de funciones trigonométricas para demostrar diversos teoremas de cálculo de áreas de figuras geométricas, tales como: Rectángulo, Triángulo y Triángulo Equilatero

Con relación al áreas de figuras geométricas, se tiene:

1. Para la figura geométrica del Rectángulo se demostraron 2 teoremas de cálculo de área mediante demostración trigonométrica.
2. Para la figura geométrica del Triángulo se demostró 1 teorema de cálculo de área mediante demostración trigonométrica.
3. Para la figura geométrica del Triángulo Equilatero se demostraron 4 teoremas de cálculo de área mediante demostración trigonométrica.

En general, se demostraron 7 teoremas de cálculo de áreas, todos ellos mediante la combinación de teoría trigonométrica y geométrica.

**Bibliografía**


1. Ayres, F , (1967) . Trigonometría plana y esférica. Editorial Mc Graw Hill. México.

2. Granville, S, (1977) .Trigonometría plana y esférica. Unión Tipográfica Editorial Hispano-Americana. México.

3. Picado, M. (2016). Influencia del uso de medios didácticos en la enseñanza de área y perímetro de figuras geométricas y el rendimiento académico en séptimo grado A y B en el Colegio Público Quebrada Honda, departamento de Matagalpa, Municipio de Matagalpa, segundo semestre 2015.

4. Rugama V., Zamora J. & Gutiérrez, M. (2017). ¨Solución de problemas en el cálculo de área y volumen de cuerpos sólidos formados por rotación en Décimo Grado de educación secundaria en el segundo semestre del año escolar 2012 del Instituto Nacional Ernesto Che Guevara de Yalí¨.

5. Swokowski, E. (2006) Álgebra y Trigonometría con Geometría Analítica. $11^a$ Edición. Thomson, México. 2006.

6. Zill, D. (2003). Álgebra y Trigonometría segunda edición, Colombia, editorial Emma Ariza H.